MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

(Option générale)

Durée : 3 heures

$M_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes.

$M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à n lignes et n colonnes.

1. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels dans lesquelles la somme des termes de chaque colonne vaut 1.

1.1. Montrer que $\mathfrak{M}$ est stable pour la multiplication des matrices.

1.2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

et soit :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}; \quad (M \in \mathfrak{M}).$$

— On définit $M^0 = I$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : M^{n+1} = M \times M^n$

— Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera :

$$M^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & 1-\beta_n \\ 1-\alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}, \text{ en le justifiant.}$$

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver les relations liant α_{n+1} à α_n et β_{n+1} à β_n.

b. Étudier les cas particuliers suivants :

$$\alpha + \beta = 1;$$
$$\alpha + \beta = 2.$$

Dans les deux cas on écrira M^n $(n \in \mathbb{N})$.

c. On suppose $\alpha + \beta \neq 1$ et $\alpha + \beta \neq 2$. On posera $\gamma = \alpha + \beta - 1$.

Remarquer que les suites $\left(\alpha_n - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)_{n \geqslant 0}$ et $\left(\beta_n - \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\right)_{n \geqslant 0}$ sont géométriques.

— En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de α_n et de β_n en fonction de α, β et n.

— Vérifier à l'aide des expressions obtenues, que si $|\alpha + \beta - 1| < 1$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \dfrac{1-\beta}{2-\beta-\alpha}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \dfrac{1-\alpha}{2-\beta-\alpha}$.

— Écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n.

d. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n + \beta_n - 1$.

2. Soit $(\alpha, \beta) \in]0,1[\times]0,1[$ et soit $p \in]0,1[$.

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et des boules vertes. Les proportions de boules blanches sont α dans U_1 et β dans U_2.

On procède à une suite de tirages *avec remise* de la façon suivante :

— la première boule est extraite de U_1 (respectivement U_2) avec la probabilité p (respectivement $1-p$).

— Ensuite $(n \geqslant 1)$:

— si la n-ième boule tirée est verte, on change d'urne pour le $(n+1)$-ième tirage;

— si la n-ième boule tirée est blanche, on effectue le $(n+1)$-ième tirage dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera :

E_n : l'événement : « le n-ième tirage a lieu dans U_1 »;

B_n : l'événement : « la n-ième boule tirée est blanche »;

et $x_n = P(E_n)$; $y_n = P(\bar{E}_n)$; $z_n = P(B_n)$; $t_n = P(\bar{B}_n)$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{21}(\mathbb{R})$.

2.1. Écrire X_1.

Montrer que :

$$(\exists A \in M_2[\mathbb{R}]) : (\forall n \in \mathbb{N}) : X_{n+1} = AX_n.$$

Écrire A. On remarquera que $A = M$.

— En déduire les expressions de x_n et de y_n en fonction de n, α, β, γ et p.

Tournez la page S. V. P.

— On vérifiera que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ x_n + y_n = 1.$$

— *Application numérique :*

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{2}.$$

— Écrire x_n et y_n en fonction de n.

— Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{9}{17}$.

2.2. Trouver les expressions de z_n et de t_n en fonction de x_n et de y_n.

Application numérique :

Si $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$, écrire les expressions de z_n et de t_n en fonction de n.

2.3. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On note $P_{E_k}(E_n) = x_{n,k}$ (probabilité de l'événement E_n sachant que E_k est réalisé).

Et on note $P_{E_k}(\overline{E_n}) = y_{n,k}$.

a. Calculer $x_{n,k}$ et $y_{n,k}$ si $n = k$.

b. Montrer que :

$$(\forall n \geqslant k) \ : \ \begin{pmatrix} x_{n+1,\,k} \\ y_{n+1,\,k} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n,\,k} \\ y_{n,\,k} \end{pmatrix}$$

où A est la matrice trouvée en (2.1).

En déduire l'expression de $x_{n,k}$ pour tout $n \geqslant k$.

c. Enfin si $n \in \{1, \ldots, k-1\}$, montrer que

$$x_{n,k} = P_{E_k}(E_n) = \frac{x_n}{x_k} P_{E_n}(E_k)$$

et en déduire l'expression de $x_{n,k}$ en fonction de n, k, α, β et p.

d. Trouver, de même, les expressions de $P_{\overline{E}_k}(E_n)$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

e. Application numérique :

Dans le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{1}{2}$, calculer la probabilité pour que le deuxième ou le quatrième tirage ait lieu dans U_1 sachant que le premier tirage a eu lieu dans U_2.

2.4. Pour $n \geqslant 2$ ($n \in \mathbb{N}$), calculer en fonction de α, β et (t_n), $n \in \mathbb{N}$, la probabilité k_n pour que la $(n-1)$-ième boule et la $(n+1)$-ième boule tirées soient blanches sachant que la n-ième est verte.

3. Soit T la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

3.1. Calculer $P(T = 1) = a_1$; $P(T = 2) = a_2$.

Puis, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $P(T = 2k)$ et $P(T = 2k+1)$ en fonction de α, β, k et a_1 et a_2.

3.2. Calculer l'espérance mathématique E(T) dans le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{1}{2}$.

3.3. Un joueur mise 10 francs avant d'effectuer une suite de tirages dans les urnes U_1 et U_2 comme en (2). r étant le rang d'apparition de la première boule blanche, il reçoit :

$$\begin{cases} 3(10 - 2r) \text{ francs} & \text{si } 1 \leqslant r \leqslant 4; \\ 0 \text{ franc} & \text{si } r \geqslant 5. \end{cases}$$

Soit G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (somme reçue – mise).

a. Dans le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{1}{2}$, donner la loi de G.

b. Calculer E (G) dans ce cas.